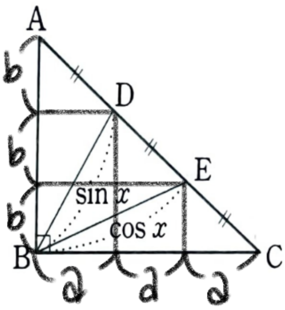
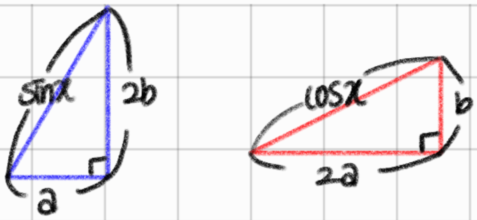
오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 점 B에서 $\overline{AC}$의 삼등분점 D, E에 이르는 거리가 각각 $\sin x$, $\cos x$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하시오.

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$





$\sin x^2 = a^2+4b^2$ $\quad$ $\cos x^2 = 4a^2+b^2$

$\therefore \sin^2 x+\cos^2 x = 1 = 5a^2+5b^2$, $a^2+b^2=\frac{1}{5}$

$\overline{AC} = 3\sqrt{a^2+b^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

모든 실수 x에 대하여

$$\log_{(a-3)^2}(ax^2+2ax+8)$$

이 정의되기 위한 정수 a의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

$a\neq 3, a\neq 2, a\neq 4$

$a^2-8a<0$, $0<a<8$

$a=1, 5, 6, 7$

$a=0$일때도 성립

다음 [보기]에서 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 그 그래프를 얻을 수 있는 것은?

ㄱ. $y=2^{x-2}$	ㄴ. $y=\log_4 x^2$
ㄷ. $y=\frac{1}{2^x}+1$	ㄹ. $y=2\log_4 x-1$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄴ. → 정의역 다름

$y=\log_2 x \rightarrow \{x \mid$ 양의실수전체$\}$

$y=\log_4 x^2 \rightarrow \{x \mid x\neq 0, R\}$

∴다른함수

연립부등식 $\begin{cases} \log_3|x-3|<4 \\ \log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하는 과정을 다음 단계로 서술하여라.

80개

[1단계] $\log_3|x-3|<4$를 만족하는 x의 범위를 구한다. [2점]

[2단계] $\log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3$를 만족하는 x의 범위를 구한다. [2점]

[3단계] 위의 단계의 공통된 범위를 구하여 정수 x의 개수를 구한다. [1점]

$x-3<81$, $x<84$, $x-3>-81$, $x>-78$

$\therefore -78<x<84$

$x(x-2)\geq 8$, $x^2-2x-8\geq 0$, $x>2$

$\therefore x\geq 4$

$\rightarrow 4\leq x<84 \rightarrow$ 총 80개

모든 실수 x에 대하여

$$\log_{|a-1|}(ax^2-ax+3)$$

이 정의되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

$a\neq1,2,0$
$a^2-12a<0,\ 0<a<12$
$\therefore a=3\sim11 \rightarrow 9$개

두 실수 x, y가 $2^x=5^y=10$을 만족할 때, $y-\dfrac{x}{x-1}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

$2^{x-1}=5,\ 2=5^{\frac{1}{x-1}},\ 2^x=5^{\frac{x}{x-1}}=10$
$5^y\div5^{\frac{x}{x-1}}=5^{y-\frac{x}{x-1}}=10\div10=1$
$\therefore y-\frac{x}{x-1}=0$

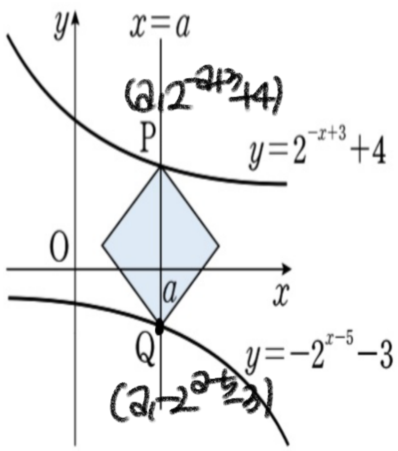
다음 조건을 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?
(단, $\log 4.73=0.6749$로 계산한다.)

(가) $\log 473=a$
(나) $\log b=-1.3251$

① 2.7222　② 2.9249　③ 3.1479
④ 3.2629　⑤ 3.4284

$a=2.6749$
$b=0.0473$
$\therefore a+b=2.7222$

직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$, $y=-2^{x-5}-3$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값은?



① 32　② 36　③ 40
④ 44　⑤ 48

$\overline{PQ}=2^{-a+3}+2^{a-5}+7$
정사각형 넓이: $\frac{1}{2}(2^{-a+3}+2^{a-5}+7)^2,\ 2^a=t$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{t}+\frac{t}{32}+7\right)^2\geq\frac{1}{2}(1+7)^2=32$

부등식

$$\log_2 x^2 - \log_2 |x| \le 3$$

을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

$x^2>0,\ |x|>0$ $\therefore x\neq 0$

$\log x^2=\log|x|^2$, $2\log_2|x|-\log_2|x|\le 3$, $\log_2|x|\le\log_2 8$

$\therefore -8\le x\le 8 \to -8\sim 8,\ x\neq 0 \to 16$개

다음 조건을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

(가) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+6} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

(나) $4^{-x}-3\cdot 2^{-x}-4<0$

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

(가): $-x^2+6\ge x$, $-3\le x\le 2$

(나): $t^2-3t-4<0$, $t<4$, $-2<x$

$\therefore -2<x\le 2 \to -1, 0, 1, 2 \to 4$개

부등식 $x^{\log_{\frac{1}{2}} x} \ge 4x^3$의 해가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 \le -2+3\log_{\frac{1}{2}} 3$, $t^2-3t+2\le 0$

$\therefore 1\le t\le 2$, $\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{1}{4}, \beta=\frac{1}{2}, \alpha+\beta=\frac{3}{4}$

다음 (가), (나)의 조건을 만족하는 방정식의 해를 각각 α, β, γ라 할 때, $\alpha\beta\gamma$의 값은?

(가) $\log_3(x^2-2)+1=\log_3(5x-4)$

(나) $(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 2　⑤ 4

(가): $3x^2-6=5x-4$, $3x^2-5x-2=0$ $\therefore \cancel{x=-\frac{1}{3}}$ or $x=2$

$x>\sqrt{2}$ or $x<-\sqrt{2}$

(나): $t^2+3t-4=0$, $t=1$ or $t=-4$ $\therefore x=2, \frac{1}{16}$

$\alpha\beta r=2\times 2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

방정식 $\log_3 x-\log_x 27-a=0$의 두 근의 곱이 9일 때, 상수 a의 값은? (단, $x>1$)

① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

$\log_3 x-\frac{3}{\log_3 x}-a=0=(\log_3 x)^2-a\log_3 x-3$, $\alpha\beta=9$

$\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3\alpha\beta=2=a$

방정식

$$5^{\log x}\cdot x^{\log 5}-3(5^{\log x}+x^{\log 5})+5=0$$

의 모든 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

$5^{\log x}=t$, $t^2-6t+5=0$, $t=5,1$
$\therefore x=10,1 \to 10+1=11$

로그함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 부등식 $f(f(f(x)))<0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

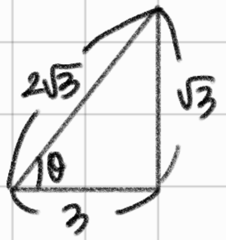
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

$\log_2(\log_2(\log_2 x))<0$, $x>0$
$0<\log_2(\log_2 x)<1$, $1<\log_2 x<2$, $\therefore 2<x<4$
$\therefore x=3 \to 1$개

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이고 $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2+\sqrt{3}$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$1-\tan\theta=(2+\sqrt{3})(1+\tan\theta)=2+\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})\tan\theta$
$\tan\theta=\frac{-1-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$



$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

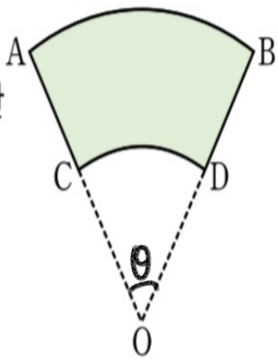
$\sin\theta\cos\theta<0$, $\cos\theta\tan\theta>0$일 때,

$|\sin\theta-\cos\theta|-\sqrt{\tan^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta}$를 간단히 하면?

① $\sin\theta$ ② $-\sin\theta$ ③ $\cos\theta$
④ $\sin\theta+\tan\theta$ ⑤ $\sin\theta-\tan\theta$

제2사분면, $\tan^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta=(\tan\theta+\cos\theta)^2$
$\therefore \sin\theta-\cancel{\cos\theta}+\tan\theta+\cancel{\cos\theta}=\sin\theta+\tan\theta$

오른쪽 그림과 같은 두 부채꼴 AOB, COD에 대하여 $\overset{\frown}{AB}=4\pi$, $\overset{\frown}{CD}=\frac{2}{3}\pi$이다. 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{35}{3}\pi$일 때, $\overline{AC}$의 길이는?



① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

$\frac{1}{2}\times4\pi\times\frac{4\pi}{\theta}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi\times\frac{2\pi}{3\theta}=\frac{35}{3}\pi$
$\frac{8\pi^2}{\theta}-\frac{2\pi^2}{9\theta}=\frac{35}{3}\pi$, $\frac{8\pi}{\theta}-\frac{2\pi}{9\theta}=\frac{35}{3}$, $\frac{70\pi}{\theta}=105$
$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$
$\overline{AO}: 4\pi\times\frac{3}{2\pi}=6$, $\overline{CO}: \frac{2}{3}\pi\times\frac{3}{2\pi}=1$
$\therefore \overline{AC}=6-1=5$